الخميس ١٠/٥/2018 م — المحاضرة ١٦

ملاحظة:

أي فضاء تبولوجي عدد مجموعاته المفتوحة منتهية يكون متراص
(لأن أي تغطية مفتوحة له منتهية).

الفضاءات التبولوجية المترابطة :- لكن منفصلين بعضها

تعريف:

نقول عن فضاء تبولوجي X أنه مترابط إذا كان لا يساوي اتحاد مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين وغير متقاطعتين، وإذا ساوى مثل هاتين المجموعتين ⇐ فهو غير مترابط

بكلام آخر:

نقول إن لدينا تقسيماً للفضاء X إذا وجدت فيه مجموعتان مفتوحتان أو مغلقتان A,B بحيث $A \neq \phi$, $B \neq \phi$
و $A \cap B = \phi$ و $A \cup B = X$

إذا لاحظنا أن المجموعتين A,B في تعريف التقسيم مجموعتان - متتامتان
نخلص إلى المبرهنة الآتية:

مبرهنة:

ليكن X فضاءً تبولوجياً إن القضايا الآتية متكافئة:

١- X مترابط

٢- X لا يساوي اتحاد مجموعتين منفصلتين غير خاليتين وغير فارغتين

٣- المجموعات الوحيدة المفتوحة والمغلقة معاً هي X , ϕ

مثال:

(X,τ) فضاء متقطع

لنأخذ المجموعة A مفتوحة ⇐ متممتها X\A مفتوحة أيضاً

/ /

نكتب $A \neq \emptyset$ ، $X \setminus A \neq \emptyset$ و $A \cup (X \setminus A) = X$

نجد ما أن A مجموعة مفتوحة ومغلقة بنفس الوقت غير $\emptyset , X$

ومنه يكون الفضاء غير مترابط

وإذا لم يوجد سوى $X , \emptyset$ مفتوحة ومغلقة بآن واحد

فإن الفضاء مترابط.

تعريف:

نقول عن مجموعة C في فضاء طبولوجي X أنها مترابطة إذا

كان الفضاء الجزئي C مترابط.

برهان مقولة:

أن C تكون غير مترابطة إذا وجدت مجموعتان مفتوحتان $A, B \in \Upsilon$

بحيث $A \cap C \neq \emptyset \, , \, B \cap C \neq \emptyset$

$(A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$

$(A \cap C) \cup (B \cap C) \supseteq C$

$(A \cap C) \quad (B \cap C)$

وإذا لم يوجد مثلهما فيكون الفضاء الجزئي C مترابطا

• لنأخذ نقطة x لا تنتمي إلى Q $\qquad x \notin Q$

ولنأخذ المجال $A =]-\infty , x[$, $B =]x , +\infty[$

$x \notin Q$

ملاحظة:

ليكن X فضاء غير مترابط نفصله بمجموعتين A , B

مفتوحتان غير متقاطعتان

إذا كانت C مجموعة مترابطة

فإنه تكون محتواة إما في A أو B $\qquad X = A \cup B$

A B

ويبرهن بطريقة نقض الفرض

الترابط = التماسك — الدائرة ومماساتها

/ /

مبرهنة:

لتكن $\{C_\alpha\}$ اسرة من المجموعات المترابطة في فضاء طوبولوجي X
اذا كانت إحدى هذه المجموعات من الاسرة ولتكن C_β
تتقاطع مع جميع المجموعات الباقية من الاسرة فإن اجتماع هذه
المجموعات يكون مجموعة مترابطة.

$$C = \bigcup_\alpha C_\alpha$$

مثل أوراق الدفتر «د. عسل» جميع الأوراق «الحلزون»

نتائج:

نتيجة 1.

اجتماع مجموعتين مترابطتين هو مجموعة غير مترابطة بالحالة العامة
واذا كانتا متقاطعتين A , B ⇐ فيكون الاجتماع مجموعة مترابطة
~~اذا كانت C مجموعة مترابطة~~ ـ مثال المحارم.
~~اذا كانت~~ [illegible]
اذا كانت $\{C_\alpha\}_{\alpha\in I}$ مجموعة مترابطة في فضاء طوبولوجي X
واذا كانت $\bigcap_\alpha C_\alpha \neq \phi$ ⇐ الاجتماع $C=\bigcup_\alpha C_\alpha$
هو مجموعة مترابطة.

نتيجة 2.

اذا كانت $\{C_n\}_{n\in N}$ أسرة من المجموعات المترابطة والمتقاطعة
مثنى مثنى ⇐ فإن اجتماعها $C=\bigcup_n C_n$
هو مجموعة مترابطة.

مثال الدرج

/ /

* أي مجال في R هو مجموعة مترابطة في R
مغلق $I = [a,b]$

ملاحظة طريفة: هذا المجال.
اذا كانت A مترابطة في ف.ط. X
فإن اي مجموعة B تحقق الشرط $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$
تكون مترابطة.
B بين البيضة وقشرتها، واذا بقية شيء من القشرة تبقى البيضة مجموعة مترابطة.

قشرة البيضة $\bar{A}$ ←
A داخل البيضة ←

نتيجة: مهمة
A مترابطة في X فإن $\bar{A}$ تكون مترابطة.
$A \subseteq \bar{A} \subseteq \bar{A}$

والعكس غير صحيح
اذا كانت اللاصقة مترابطة فليس من الضروري ان تكون A مترابطة
ex: Q غير مترابطة في R
$\bar{Q} = R$ مترابطة
ex: $A = [1,2[\cup]2,3]$ غير مترابطة
$= A = [1,3] \setminus \{2\}$
بينما: $\bar{A} = [1,3]$ مترابطة.

نتيجة:
بما ان التطبيق مستمر فهو يحافظ على الترابط
ex: اذا كان f تطبيقاً مستمراً من الفضاء المترابط X الى الفضاء Y
← f(x) مترابط في Y
واذا كان f(x)=Y و f غامر ← Y فضاء مترابط

نتيجة:
فضاء القسمة لفضاء مترابط هو فضاء مترابط

دائماً المجموعة الخالية والفضاء متر ابطة.

| | المستقيم - المنحني - المستوي : مجموعات مترابطة |

ملاحظة:

يكون فضاء الجداء X مترابط ⟸ كانت جميع الفضاءات الجزئية مترابطة

نتيجة:

تقاطع مجموعتين مترابطتين ليس بالضرورة أن تكون مجموعة مترابطة

التقاطع غير مترابط

التقاطع مترابط

$X \; ; \; \tau = \{\phi, X\}$ الطوبولوجيا الضعيفة

بأن X مع الطوبولوجيا الضعيفة يشكل فضاء مترابط (X, τ)

لأن ϕ, X هما المجموعتان المفتوحتان المغلقتان الوحيدتان في الطوبولوجيا

- الملف: محاضرة ١٥ - محاضرة

الختام: الأربعاء الأسبوع القادم ... محاضرة

مع الدكتور ... البخيتة